ŽUPANIJSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE
27. veljače 2015.

8. razred-rješenja

OVDJE SU DANI NEKI NAČINI RJEŠAVANJA ZADATAKA. UKOLIKO UČENIK IMA DRUGAČIJI POSTUPAK RJEŠAVANJA, ČLAN POVJERENSTVA DUŽAN JE I TAJ POSTUPAK BODOVATI I OCIJENITI NA ODGOVARAJUĆI NAČIN.

1. Izraz $x^2 - 1 = y^2 + 2014$ možemo pisati u obliku $x^2 - y^2 = 2015$ odnosno $(x - y) \cdot (x + y) = 2015$.

Kako su $x, y \in \mathbb{N}$, onda je $x - y < x + y$. 2 BODA

Broj $2015 = 5 \cdot 13 \cdot 31$ pa ga možemo napisati u obliku umnoška kao

$2015 = 1 \cdot 2015$, 1 BOD

$2015 = 5 \cdot 403$, 1 BOD

$2015 = 13 \cdot 155$, 1 BOD

$2015 = 31 \cdot 65$. 1 BOD

Iz $x - y = 1$ i $x + y = 2015$ dobivamo da je $x = 1008$, $y = 1007$. 1 BOD

Iz $x - y = 5$ i $x + y = 403$ dobivamo da je $x = 204$, $y = 199$. 1 BOD

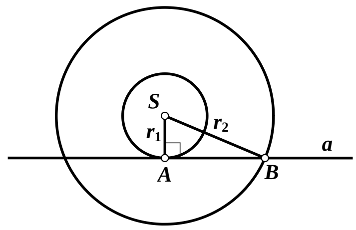
Iz $x - y = 13$ i $x + y = 155$ dobivamo da je $x = 84$, $y = 71$. 1 BOD

Iz $x - y = 31$ i $x + y = 65$ dobivamo da je $x = 48$, $y = 17$. 1 BOD

……………………………………………………………………..……….. UKUPNO 10 BODOVA

Napomena: Ako nije utvrđen uvjet $x - y < x + y$, potrebno je razmotriti svih 8 mogućnosti, a ako se to ne učini bodovati s najviše 6 bodova.

2.



Tangenta kružnice je okomita na polumjer u diralištu A pa je trokut SAB pravokutan. 1 BOD

Primjenom Pitagorinog poučka na trokut SAB dobivamo $|AB|^2 = r_2^2 - r_1^2$, 1 BOD

$100 = r_2^2 - r_1^2$. 1 BOD

Površina unutarnjeg kruga jednaka je $P_1 = r_1^2\pi$, 1 BOD

a površina vanjskog kruga jednaka je $P_2 = r_2^2\pi$ 1 BOD

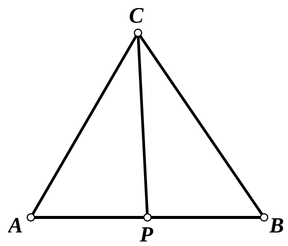
pa je površina kružnog vijenca jednaka $P = P_2 - P_1 = r_2^2\pi - r_1^2\pi$ 2 BODA

$$P = (r_2^2 - r_1^2)\pi = 100\pi$$ 2 BODA

$$P \approx 314\ \text{cm}^2 .$$ 1 BOD

…………………………………………………………………..……….. UKUPNO 10 BODOVA

3.



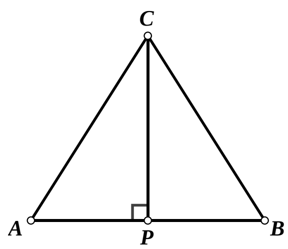
Promatramo trokut *APC*. Njegove stranice imaju duljine |*AP*| = 24 cm, |*PC*| = 18 cm i |*CA*| = 30 cm.
1 BOD

Zbroj površina kvadrata konstruiranih nad dvjema kraćim stranicama je

$18^2 + 24^2 = 324 + 576 = 900$. 1 BOD

Površina kvadrata nad njegovom najduljom stranicom je $30^2 = 900$. 1 BOD

Budući da je $18^2 + 24^2 = 30^2$, prema obratu Pitagorinog poučka zaključujemo da je trokut *APC* pravokutan s pravim kutom pri vrhu *P*. 2 BODA



Trokuti ΔAPC i ΔBPC su pravokutni i imaju zajedničku katetu $\overline{CP}$, a prema uvjetu zadatka vrijedi |*AP*| = |*BP*|.

Prema poučku S-K-S o sukladnosti slijedi da je $\Delta APC \cong \Delta BPC$ 1 BOD

pa je |*AC*| = |*BC*| = 30 cm, tj. trokut *ABC* je jednakokračan s osnovicom $\overline{AB}$. 1 BOD

Opseg trokuta ABC jednak je $O = 48 + 2 \cdot 30 = 108$ cm. 1 BOD

Budući da je $\overline{CP} \perp \overline{AB}$, težišnica $\overline{CP}$ ujedno je i visina iz vrha C.

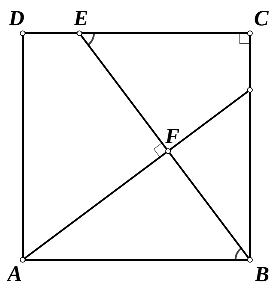
Površina trokuta ABC jednaka je $P_{ABC} = \dfrac{|AB| \cdot |CP|}{2} = \dfrac{48 \cdot 18}{2} = 432$ cm^2. 2 BODA

……………………………………………………………………..……….. UKUPNO 10 BODOVA

4. Prvi način:

Trokut ABF je pravokutan, a hipotenuza tog trokuta je stranica kvadrata $ABCD$. 1 BOD

Primjenom Pitagorinog poučka na trokut ABF dobivamo $|AB|^2 = 3^2 + 4^2 = 25$, tj. duljina stranice kvadrata je $|AB| = 5$ cm. 1 BOD



Pravac EB je presječnica paralelnih pravaca AB i CD pa je $\measuredangle FBA \cong \measuredangle BEC$. 2 BODA

Pravokutni trokuti ΔABF i ΔBEC imaju dva para sukladnih kutova ($\measuredangle FBA \cong \measuredangle BEC$ i $\measuredangle AFB \cong \measuredangle ECB$) pa su prema poučku K-K o sličnosti ta dva trokuta slična. 3 BODA

Duljine odgovarajućih stranica trokuta ΔABF i ΔBEC su proporcionalne, tj. vrijedi

$|BF| : |EC| = |AF| : |BC|$. 1 BOD

Uvrštavanjem poznatih podataka nalazimo $3 : |EC| = 4 : 5$, 1 BOD

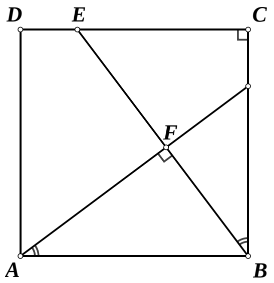
a onda slijedi $|EC| = 15 : 4 = 3.75$ cm. 1 BOD

……………………………………………………………………..……….. UKUPNO 10 BODOVA

Drugi način:

Trokut ABF je pravokutan, a hipotenuza tog trokuta je stranica kvadrata $ABCD$. 1 BOD

Primjenom Pitagorinog poučka na trokut ABF dobivamo $|AB|^2 = 3^2 + 4^2 = 25$, tj. duljina stranice kvadrata je $|AB| = 5$ cm. 1 BOD



Budući da je $AF \perp BF$ i $AB \perp CB$, šiljasti kutovi $\measuredangle BAF$ i $\measuredangle CBE$ imaju međusobno okomite krakove, tj. kutovi $\measuredangle BAF$ i $\measuredangle CBE$ su sukladni. 2 BODA

Pravokutni trokuti ΔABF i ΔBEC imaju dva para sukladnih kutova ($\measuredangle BAF \cong \measuredangle CBE$ i $\measuredangle AFB \cong \measuredangle ECB$) pa su prema poučku K-K o sličnosti ta dva trokuta slična. 3 BODA

Duljine odgovarajućih stranica trokuta ΔABF i ΔBEC su proporcionalne, tj. vrijedi

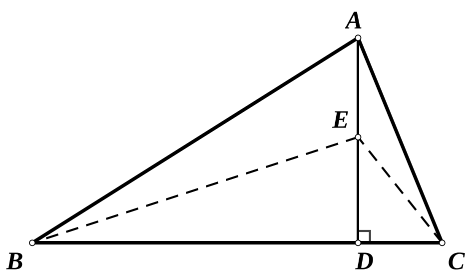
$|BF|:|EC| = |AF|:|BC|$. 1 BOD

Uvrštavanjem poznatih podataka nalazimo $3:|EC| = 4:5$, 1 BOD

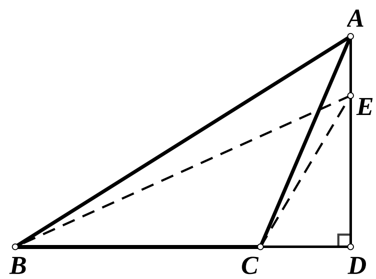
a onda slijedi $|EC|$ = 15 : 4 = 3.75 cm. 1 BOD

…………………………………………………………………..……….. UKUPNO 10 BODOVA

5. Na slici je moguće uočiti četiri pravokutna trokuta *BDE*, *EDC*, *BDA* i *ADC*.



ili



1 BOD

Primjenom Pitagorinog poučka na trokute *BDA* i *BDE* dobivamo

$|AB|^2 = |AD|^2 + |BD|^2$, 1 BOD

$|EB|^2 = |ED|^2 + |BD|^2$ 1 BOD

pa je $|AB|^2 - |EB|^2 = |AD|^2 - |ED|^2$. 2 BODA

Primjenom Pitagorinog poučka na trokute *ADC* i *EDC* dobivamo

$|AC|^2 = |AD|^2 + |DC|^2$, 1 BOD

$|EC|^2 = |ED|^2 + |DC|^2$ 1 BOD

pa je $|AC|^2 - |EC|^2 = |AD|^2 - |ED|^2$. 2 BODA

Iz $|AB|^2 - |EB|^2 = |AD|^2 - |ED|^2$ i $|AC|^2 - |EC|^2 = |AD|^2 - |ED|^2$ slijedi tvrdnja, tj.

$|AB|^2 - |EB|^2 = |AC|^2 - |EC|^2$. 1 BOD

………………………………………………………………………..……….. UKUPNO 10 BODOVA

Napomena: Ako nisu skicirani ili spomenuti i šiljastokutni i tupokutni trokut, nego samo jedan od njih, bodovati s najviše 8 bodova.